

УДК 330.46:519.2

DOI: <https://doi.org/10.32840/2522-4263/2019-6-75>**Рикота В.І.***магістрант**Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна***Ковпак Е.О.***кандидат економічних наук, доцент,**доцент кафедри економічної кібернетики та прикладної економіки  
Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна***Rikota Valentina***Magistrate**V.N. Karazin Kharkiv National University***Ковпак Elvira***Ph.D (Economics), Associate Professor,**V.N. Karazin Kharkiv National University*

## ПРОГНОЗУВАННЯ ДИНАМІКИ ІНДЕКСУ PFTS ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛІ ARIMA-GARCH

### FORECASTING THE DYNAMICS OF THE PFTS STOCK INDEX BY USING THE ARIMA-GARCH MODEL

#### АНОТАЦІЯ

Досліджується ефективність гібридизації моделей ARIMA з моделлю GARCH за формулою перетворення Бокса-Кокса для прогнозування динаміки індексу PFTS. Перетворення Бокса-Кокса використовується як перетворення даних через його здатність нормалізувати дані, стабілізувати дисперсію і зменшити гетероскедастичність. Гібридна модель ARIMA-GARCH побудована на підставі двоетапної процедури: на першому етапі для моделювання динаміки індексу PFTS використовується найкраща модель ARIMA, а залишки ARIMA на другому етапі моделюються за допомогою моделі GARCH. Емпіричні результати показують, що запропонована гібридна модель ARIMA-GARCH поліпшує точність апроксимації вихідного ряду і прогнозування динаміки індексу PFTS порівняно з прогнозуванням у рамках інструментарію ARIMA. Отримані результати свідчать про те, що комбінація ARIMA і GARCH має потенціал для подолання лінійного обмеження й обмеження даних у моделях ARIMA.

**Ключові слова:** ARIMA, GARCH, прогнозування фондових індексів, PFTS, гібридна модель ARIMA-GARCH.

#### АННОТАЦИЯ

Исследуется эффективность гибридации моделей ARIMA с моделью GARCH по формуле преобразования Бокса-Кокса для прогнозирования динамики индекса PFTS. Преобразование Бокса-Кокса используется в качестве преобразования данных из-за его способности нормализовать данные, стабилизировать дисперсию и уменьшить гетероскедастичность. Гибридная модель ARIMA-GARCH построена на основании двухэтапной процедуры: на первом этапе для моделирования динамики индекса PFTS используется лучшая модель ARIMA, а остатки ARIMA на втором этапе моделируются с помощью модели GARCH. Эмпирические результаты показывают, что предложенная гибридная модель ARIMA-GARCH улучшает точность аппроксимации исходного ряда и прогнозирования динамики индекса PFTS по сравнению с прогнозированием в рамках инструментария ARIMA. Полученные результаты свидетельствуют о том, что комбинация ARIMA и GARCH обладает потенциалом для преодоления линейного ограничения и ограничения данных в моделях ARIMA.

**Ключевые слова:** ARIMA, GARCH, прогнозирование фондовых индексов, PFTS, гибридная модель ARIMA-GARCH.

#### ANNOTATION

The stock market is an integral part of the country's economic system and, in addition to market-based ones, performs a number of specific functions in the country's economic policy. As an infrastructure component economic policy, a stable and developed stock market facilitates the solution of important tasks facing the state. One of the main reasons for the long-term crisis period is the growing inability of widespread economic and mathematical methods and models to adequately analyze and forecast changes in financial and economic systems in particular stock markets. Increased efficiency of stock index forecasting methods is aimed at increasing the quality of investment decisions and, as a result, should lead to the attraction of more potential investors into economic activity. Growth in investment activity, in turn, leads to higher rates of economic development and standard of living. Therefore, the development of effective stock index forecasting methods is an urgent task in improving the efficiency of both the stock market itself and the economic system as a whole. The efficiency of hybridization is being investigated of ARIMA models with the GARCH model by the Box-Cox transformation formula for forecasting the PFTS index dynamics. The Box-Cox transformation is used as the data transformation due to its power in normalizing data, stabilizing variance and lessening heteroskedasticity. The ARIMA-GARCH hybrid model is based on a two-step procedure: in the first step, the best ARIMA model is used to modeling PFTS index dynamics and ARIMA residuals in the second step are modeled using the GARCH model. Parameter estimation in hybrid ARIMA-GARCH model is employed by Maximum Likelihood method. Empirical results indicate that the proposed hybrid ARIMA-GARCH model improves the approximation accuracy of the initial series and forecasting the dynamics of the PFTS index in comparison with the forecasting within the ARIMA toolkit. The results show that the combination of ARIMA and GARCH have potential to overcome the linear and data limitation in the ARIMA models. Hence, such hybridization of ARIMA-GARCH is a promising approach in stock indexes modeling and forecasting.

**Key words:** ARIMA, GARCH, stock index forecasting, PFTS, hybrid ARIMA-GARCH model.

**Постановка проблеми** у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями. Фондовий ринок є важливою частиною економічної системи кра-

їни. За останнє десятиріччя кількість і масштаби фінансових криз як у розвинених, так і в країнах, що розвиваються, особливо в Україні, зросли. Використання ретроспективних даних для прогнозування класичними кількісними підходами майбутніх значень фінансових часових рядів ставиться під сумнів у результаті якісної зміни ринкових тенденцій. Широко розповсюджені економіко-математичні методи більшою мірою нездатні адекватно аналізувати і прогнозувати динаміку біржових показників. Розроблення ефективних методів прогнозування динаміки фондових індексів є актуальним завданням у підвищенні ефективності як самого фондового ринку, так і економічної системи у цілому, бо служить обґрунтуванням інвестиційних рішень.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спираються автори. Теоретичні та прикладні аспекти аналізування і прогнозування рівня та динаміки фондових індексів у їхньому впливі на розвиток економіки відображено в роботах таких авторів, як Р. Сміт, Н. Гончарова, Г. Калач, О. Квасова, Я. Белінська, О. Амосов, Н. Блага, А. Дегтяр, А. Монаєнко, В. Косенко, О. Болдуєва, Г. Калач, В. Корнеєв, М. Назарчук, К. Марахов, Б. Рубцов та ін. Серед українських учених проблемами розвитку біржового ринку займалися О.М. Сохацька, Ю.П. Зайченко, А.Ф. Баторшина, О.В. Парандій та ін.

Для фінансових часових рядів часто використовують моделі ARMA(p,q) та ARIMA(p,d,q). Модель ARMA(p,q) може вживатися для опису стаціонарних процесів, включаючи елементи, що описують авторегресійні компоненти, і елементи, які моделюють залишок як процес ковзного середнього згідно з рівнянням [1]:

$$y_t = \sum_{j=1}^p a_j y_{t-j} + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, a_p \neq 0, \theta_q \neq 0,$$

де  $y_t$  – рівень часового ряду в момент часу  $t$ ;  $y_{t-1}, \dots, y_{t-p}$  – рівні часового ряду в моменти часу  $t-1, \dots, t-p$ ;  $a_0, \dots, a_p$  – оцінювані коефіцієнти авторегресії;  $\varepsilon_t$  – випадкове обурення в момент часу  $t$ ;  $\varepsilon_{t-i}$  – значення випадкової компоненти  $i$  часових періодів назад;  $\theta_1, \dots, \theta_p$  – оцінювані коефіцієнти ковзного середнього.

Згідно з методом Бокса і Дженкінса, якщо після  $d$  послідовних різниць ряд зводиться до стаціонарного, можемо використовувати комбіновану модель авторегресії і ковзного середнього, так звану ARIMA(p,d,q), для прогнозування його рівнів.

Бокс-Кокс (1964 р.) у своїй роботі використовував математичну формулу для перетворення даних, щоб вони могли бути більш нормально розподілені, а рівняння дисперсії виправляє нормальність, лінійність і зменшує гетероскедастичність. Формула перетворення Бокса-Кокса має вигляд [2]:

$$y_t^* = \begin{cases} \frac{y_t^\lambda - 1}{\lambda}, \lambda \neq 0 \\ \ln(y_t), \lambda = 0 \end{cases},$$

де  $y_t$  – фактичні дані за період  $t$ ;  $y_t^*$  – перетворені дані за період  $t$ ;  $\lambda$  – мінімальне значення середньоквадратичної помилки залишків. Перетворення наведеного рівняння справедливо тільки для позитивного значення часового ряду  $y_t > 0$ .

У моделі ARCH(p), запропонованій Р. Енгл, передбачається, що дисперсія є лінійною функцією квадратів попередніх значень досліджуваної величини [3]:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i y_{t-i}^2, a_0 > 0, a_i \geq 0$$

У рамках ARCH-моделі стало можливим пояснити такий феномен фінансових часових рядів, як кластерність, який полягає у тому, що великі (малі) значення  $y_t$  тягнуть за собою великі (малі) наступні значення, але непередбачуваного знаку.

Авторегресійна модель з умовною гетероскедастичністю (GARCH) – це узагальнена ARCH-модель, яка була розроблена в 1986 р. Т. Боллерсломом і є моделлю залишків для моделі AR(p). Ця модель характеризується двома параметрами  $p$  та  $q$  і позначається GARCH(p,q).

Характерною особливістю цієї моделі є припущення, що значення умовної дисперсії залежить від попередніх значень рядів і попередніх значень дисперсії.

У цій моделі, як і ARCH(p)-моделі,  $y_t = \sigma_t \varepsilon_t$ , але щодо формування волатильності  $\sigma_t$  передбачається, що [4, с. 313]:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, a_0 > 0, a_i \geq 0, \beta_j \geq 0$$

Для аналізу волатильності біржових показників із другої половини 80-х років почали використовувати комбіновані ARIMA-GARCH-моделі [4].

Формулювання цілей статті (**постановка завдання**). Мета статті – розроблення ARIMA-GARCH-моделі для прогнозування динаміки фондового індексу PFTS.

**Виклад основного матеріалу дослідження** з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів. Для побудови ARIMA-моделі були взяті щомісячні дані щодо динаміки PFTS індексу за період із березня 2009 р. по квітень 2019 р. з Фондової біржі ПФТС [5]. Довжина вибірки складається зі 122 значень, динаміку PFTS-індексу проілюстровано на рис. 1 а).

Із рис. 1 (а, б) видно, що часовий ряд PFTS-індексу є нестаціонарним. Тому про логарифмований часовий ряд PFTS із метою видалення тренду з початкових даних було продиференційовано, він виявився стаціонарним, і вже для нього здійснювалася процедура підбору параметрів  $p$  та  $q$  у рамках моделі ARIMA(p,d,q).

Оцінка параметрів ARIMA для прогнозування PFTS-індексу виконувалася за допомогою мови програмування R. Інформаційні критерії для восьми альтернативних моделей ARIMA для моделювання динаміки PFTS представлено в табл. 1.

За інформаційними критеріями та на підставі діагностичних тестів залишків найкра-

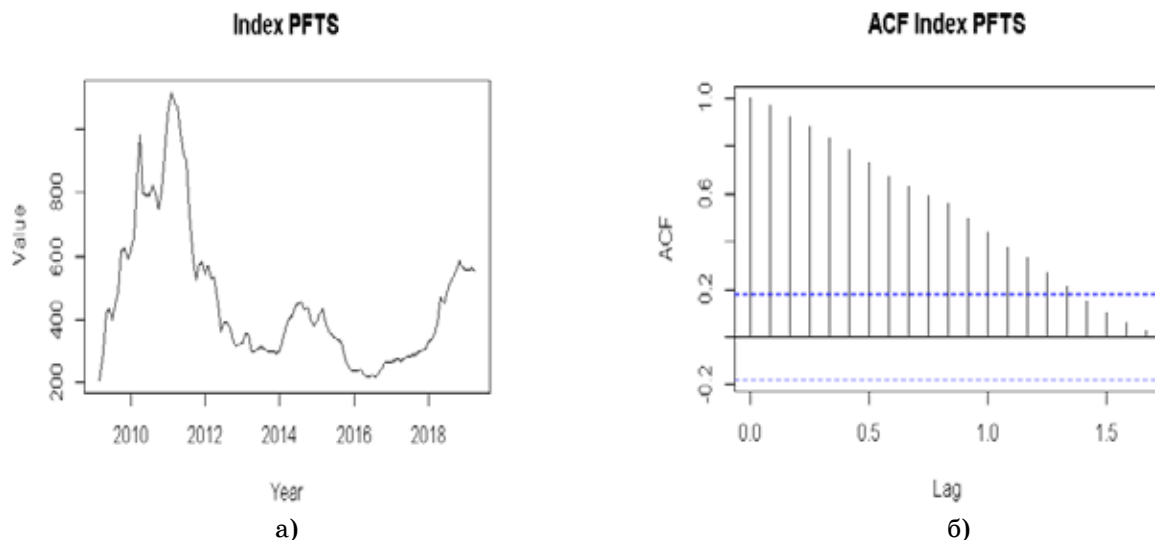


Рис. 1. а) – графік динаміки PFTS-індексу; б) – ACF PFTS-індексу

Джерело: розроблено авторами за даними Фондової біржі PFTS [5]

щодо моделлю з табл. 1 виявилася модель ARIMA (9, 2, 6) (інформаційні критерії AIC=-468,16 та BIC=-423,56; статистика Жарке-Бера для моделі становить  $\chi^2=4,69$ , отже, нульова гіпотеза про нормальність розподілу залишків ряду не відкидається; гіпотеза про те, що математичне очікування залишків дорівнює нулю, приймається).

Оцінки коефіцієнтів ARIMA(9, 2, 6) для ряду моделі PFTS такі:

$$\alpha_1 = 0,097, \alpha_2 = -0,334, \alpha_3 = -0,377, \alpha_4 = -0,226, \alpha_5 = 0,32, \alpha_6 = -0,711, \alpha_7 = -0,25, \alpha_8 = -0,226, \alpha_9 = -0,337$$

$$\beta_1 = -0,5369, \beta_2 = -0,0065, \beta_3 = 0,2801, \beta_4 = 0,0412, \beta_5 = -0,4703, \beta_6 = 0,7829.$$

Результати порівняння фактичних значень PFTS та прогнозних за моделлю ARIMA(9, 2, 6) представлено в табл. 2.

Показник MAPE для тестової вибірки (із табл. 2) становив 2,4%, точність прогнозу – 97,6%, що свідчить про непогані прогнозні

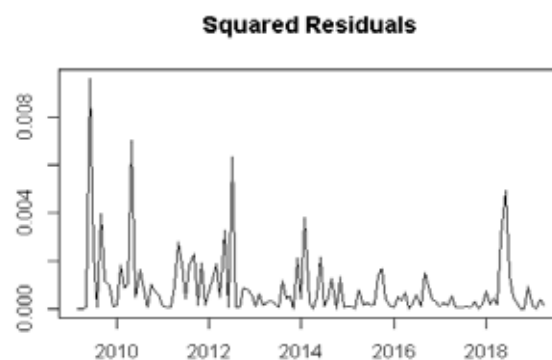


Рис. 2. Квадрат залишків моделі ARIMA (9, 2, 6)

Джерело: розроблено авторами

якості ARIMA (9, 2, 6) для прогнозування динаміки PFTS-індексу.

Після виявлення найкращої специфікації ARIMA для досліджуваного ряду необхідно перевірити квадрат залишків цієї моделі на наяв-

Таблиця 1

Результати оцінювання моделей ARIMA для PFTS-індексу

№	Модель	AIC	BIC	№	Модель	AIC	BIC
1	ARIMA(9,2,6)	-468,16	-423,56	5	ARIMA(5,2,2)	-460,44	-438,13
2	ARIMA(1,2,5)	-456,95	-437,43	6	ARIMA(5,2,0)	-462,36	-445,63
3	ARIMA(5,2,10)	-459,61	-415,01	7	ARIMA(13,2,5)	-463,82	-410,85
4	ARIMA(10,2,1)	-463,54	-430,09	8	ARIMA(2,2,0)	-440,29	-431,92

Джерело: розроблено авторами

Таблиця 2

Результати прогнозу за моделлю ARIMA (9, 2, 6)

Місяць	Фактичні дані	Прогноз	Відносна похибка прогнозу
Трав.19	569,78	542,48	0,048
Черв.19	552,98	540,03	0,023
Лип.19	542,59	537,36	0,010
Серп.19	533,97	541,16	0,013
Вер.19	522,55	536,67	0,027

Джерело: розроблено авторами

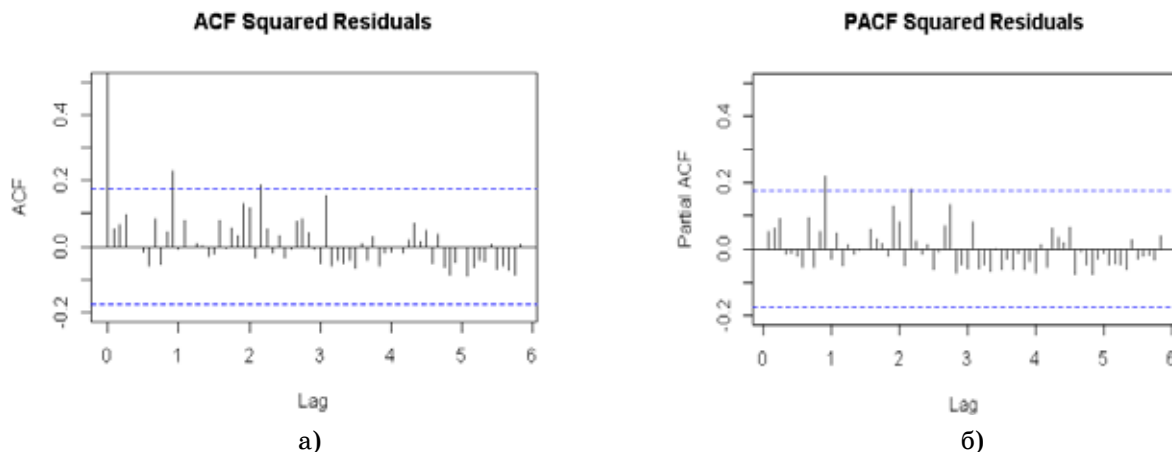


Рис. 3. ACF та PACF ряду квадратів залишків моделі ARIMA (9, 2, 6)

Джерело: розроблено авторами

ність кластерів волатильності. Якщо такі кластери волатильності є, слід використовувати ARCH/GARCH для моделювання волатильності ряду.

Графік квадратів залишків ARIMA (9, 2, 6) (рис. 2) показує скупчення мінливості в певні моменти часу. PACF квадратів залишків моделі ARIMA (9, 2, 6) скорочується після 11 лага, навіть якщо деякі інші відставання значні (рис. 3).

Вибір найкращої форми гібридної моделі ARCH/GARCH здійснюється на основі метода максимальної правдоподібності [6].

Найкращою моделлю з найбільшим значенням Log likelihood у табл. 3 є GARCH (1,1).

Рівняння моделі GARCH (1,1) для моделювання залишків моделі ARIMA (9, 2, 6) має вигляд:

$$e_t = \sigma_t \omega_t,$$

$$\sigma_t^2 = 0.000018 + 0.0409y_{t-1}^2 + 0.9312\sigma_{t-1}^2,$$

$\omega_t$  – білий шум.

Порівняємо результати моделі ARIMA та комбінованої моделі ARIMA-GARCH. Через те, що для визначення параметрів ARIMA використовувалися дані, перетворені за допомогою формули Бокса-Кокса, то для отримання прогнозних значень ARIMA та ARIMA-GARCH-моделей було використано зворотне перетворення. Розрахунки точкових прогнозів PFTS занесені до табл. 4.

Із табл. 4 видно, що середня відносна похибка прогнозу для гібридної моделі становить 2,34%, що на 0,06% менше, ніж результат

Таблиця 3  
Результати оцінювання моделей ARCH/GARCH для залишків моделі ARIMA (9, 2, 6)

Модель	N	p	q	Log likelihood
ARCH(1)	121	1	0	255,7475
ARCH(2)	121	2	0	253,9597
ARCH(3)	121	3	0	251,4228
ARCH(4)	121	4	0	257,2623
ARCH(5)	121	5	0	255,6605
ARCH(6)	121	6	0	253,7593
ARCH(7)	121	7	0	251,0587
ARCH(8)	121	8	0	249,4217
ARCH(9)	121	9	0	247,0939
ARCH(10)	121	10	0	245,2515
<b>GARCH(1,1)</b>	<b>121</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>257,4519</b>
GARCH(1,2)	121	1	2	254,1341

Джерело: розраховано авторами

Таблиця 4  
Прогнозні значення ARIMA та ARIMA-GARCH-моделей для PFTS-індексу

Прогнозний період	Фактичні значення		
		ARIMA	ARIMA-GARCH
трав.2019	569,7881	542,4886	544,9567
черв.2019	552,9829	540,0317	542,6865
лип.2019	542,5905	537,3635	539,9269
серп.2019	533,9733	541,1609	543,7735
вер.2019	522,5508	536,6702	539,2486
Середня відносна похибка прогнозу, %		2,4	2,34

Джерело: розроблено авторами

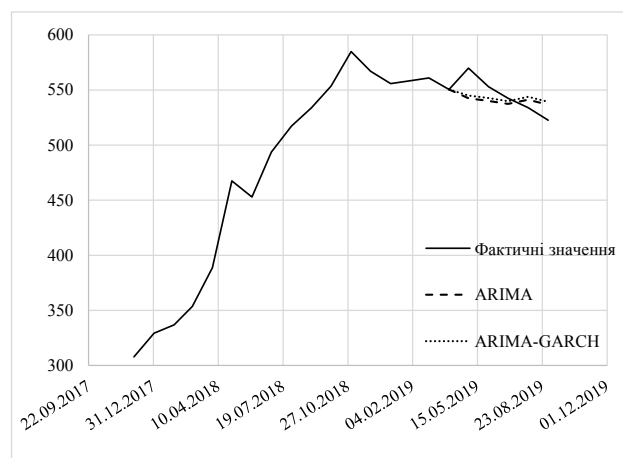


Рис. 4. Графік прогнозів ARIMA (9, 2, 6) та ARIMA (9, 2, 6)-GARCH (1, 1)

Джерело: розроблено авторами за даними Фондової біржі PFTS [5]

ARIMA-моделі. На рис. 4 представлено результати прогнозування за моделями ARIMA (9, 2, 6) та ARIMA (9, 2, 6)-GARCH (1, 1) для щомісячних значень PFTS-індексу з травня 2019 р. по вересень 2019 р.

**Висновки** з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямку. Результати, отримані у статті, можуть бути використані інвесторами в прийнятті ефективних рішень. На основі адекватної, точної моделі вони можуть робити прогноз на майбутнє. Для цілей прогнозування щомісячних значень індексу PFTS гібридна ARIMA-GARCH-модель себе показала краще за ARIMA. Емпіричні результати показали, що на даних динаміки фондового індексу PFTS за період із березня 2009 по квітень 2019 р. гібридна модель ARIMA (9, 2, 6)-GARCH (1, 1) забезпечує найкращу якість прогнозування порівняно з ARIMA (9, 2, 6).

#### БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Носко В.П. Эконометрика. Элементарные методы и введение в регрессионный анализ временных рядов. Москва : ИЭПП, 2004. 501 с.
2. Hyndman R.J., Athanasopoulos G. Forecasting: principles and practice. Australia : OTexts, 2013. 292 p.

3. Athanasopoulos G., Hyndman R.J. Forecasting: Principles and Practice. Australia : OTexts, 2018. 504 p.
4. Эконометрика. Начальный курс / Я.П. Магнус и др. Москва : Дело, 2004. 576 с.
5. Фондова біржа ПФТС. Київ, 1997. URL: <http://pfts.ua/> (дата звернення: 01.05.2019).
6. Dritsaki C. The Performance of Hybrid ARIMA-GARCH Modeling and Forecasting Oil Price. *International Journal of Energy Economics and Policy*. 2018. Vol. 8. № 3. P. 14–21.

#### REFERENCES:

1. Sock V.P. (2004). *Ekonometrika. Elementarnye metody i vvedenie v regressionnyy analiz vremennyh ryadov* [Econometrics. Elementary methods and introduction to time series regression analysis]. Moscow: IET. (in Russian)
2. Hyndman R.J., Athanasopoulos G. (2013). *Forecasting: principles and practice*. Australia: OTexts. (in English)
3. Athanasopoulos G., Hyndman R.J. (2018). *Forecasting: Principles and Practice*. Australia: OTexts. (in English)
4. Magnus Ya.R. et al. (2004). *Ekonometrika. Nachal'nyi kurs* [Econometrics. The initial course]. Moscow: Delo Publ. (in Russian)
5. *Fondova birzha PFTS* [PFTS Stock Exchange]. Retrieved from: <http://pfts.ua/> (accessed: 01.05.2019).
6. Dritsaki C. (2018). The Performance of Hybrid ARIMA-GARCH Modeling and Forecasting Oil Price. *International Journal of Energy Economics and Policy*, vol. 8, no. 3, pp. 14–21.