

СЕКЦІЯ 8 МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.86:330.34

Горбатюк К.В.

*кандидат економічних наук, доцент
Хмельницького національного університету*

ВИКОРИСТАННЯ ЗАСОБІВ МОВИ ПРОГРАМУВАННЯ R ДЛЯ НЕЧІТКОГО ОЦІНЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ

АНОТАЦІЯ

У статті розглянуто методику нечіткого опису невизначеності в економічних показниках із застосуванням програмних засобів пошуку результатів арифметичних операцій над нечіткими величинами. Подано визначення арифметичних операцій над нечіткими величинами, розглянуто методи отримання результуючих показників у вигляді нечітких чисел за допомогою засобів мови програмування R. На прикладі економічних показників, що використовуються в нормуванні праці, одержано результати розрахунку тривалості виконання технологічної операції та її елементів у вигляді нечітких чисел, а також визначено напрями подальших досліджень.

Ключові слова: нечіткі величини, нечіткі числа, арифметичні операції над нечіткими числами, економічні показники, нормування праці, тривалість виконання технологічної операції.

АННОТАЦИЯ

В статье рассмотрена методика нечеткого описания неопределенности в экономических показателях с применением программных средств поиска результатов арифметических операций над нечеткими величинами. Дано определение арифметических операций над нечеткими величинами, рассмотрены методы получения результирующих показателей в виде нечетких чисел с помощью средств языка программирования R. На примере экономических показателей, используемых в нормировании труда, получены результаты расчетов длительности выполнения технологической операции и ее элементов в виде нечетких чисел, а также определены направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: нечеткие величины, нечеткие числа, арифметические операции над нечеткими числами, экономические показатели, нормирование труда, длительность технологической операции.

ANNOTATION

The method of fuzzy description of uncertainty in economic indicators, with the use of software tools for finding the results of algebraic operations over fuzzy values, is considered in the article. The definition of algebraic operations over fuzzy values is given and the methods for obtaining the resulting indicators in the form of fuzzy numbers using R programming language resources are considered. On the example of economic indicators used in the labor standardization, the results of the evaluation of the length of the execution of a technological operation and its elements in the form of fuzzy numbers were obtained and the directions for further research were determined.

Key words: fuzzy values, fuzzy numbers, algebraic operations over fuzzy numbers, economic indicators, labor standardization, length of the execution of a technological operation.

Постановка проблеми. В задачах оцінювання показників у різних галузях економіки часто виникає необхідність врахування неповної інформації та прийняття управлінських рішень

в умовах невизначеності та ризику. Одним зі способів опису неповноти інформації в показниках різної природи є формалізація невизначеності за допомогою апарату теорії нечітких множин. Представлення економічних показників у вигляді нечітких величин відкриває широкі можливості для врахування невизначеності та використання в розрахунках усієї наявної інформації без суттєвих втрат через припущення про детермінованість і чіткість відповідних значень. Оперування економічними показниками, поданими у вигляді нечітких величин, вимагає застосування відповідних методів розрахунків, зокрема з використанням програмних засобів. Це дасть змогу автоматизувати пошук результуючих показників через встановлення взаємозв'язків між показниками.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У 1965 році американський вчений Л. Заде [1] представив концепцію теорії нечітких множин для вирішення проблем моделювання невизначеності нечіткої природи. З того часу методи й основні поняття теорії нечітких множин набули сильного поширення в практиці вирішення економічних завдань. Введення поняття нечітких множин, класів з неточно визначеними межами, що описуються функціями належності, забезпечило основу для розвитку гнучкішого підходу до аналізу суджень та моделювання складних систем, поведінка яких описується скоріше лінгвістичними, ніж числовими змінними [1].

Як зазначено в роботах [2; 3], присвячених економіко-математичному моделюванню процесів праці, моделювання показників за середніми характеристиками є не зовсім адекватним. Вирішення цієї проблеми запропоновано здійснити за рахунок введення теорії відхилень у практику нормування праці. Подальше вдосконалення формалізованого опису невизначеності в показниках запропоновано за допомогою нечітких величин (нечітких чисел) [4] за умови побудови функцій належності на основі експертної інформації та статистичних характеристик розподілу досліджуваних величин. Робота з нечіткими показниками вимагає застосування відповідних теоретично обґрунтова-

них методів розрахунків, що є неможливим без застосування сучасних обчислювальних засобів.

Останнім часом для здійснення нечітких розрахунків створюються програмні продукти, що, зокрема, враховують необхідність виконання арифметичних операцій над нечіткими величинами, теоретичні основи яких викладені, наприклад, у роботі [5]. Одним із таких програмних засобів є мова програмування R з відповідними бібліотеками функцій, що постійно доповнюються реалізаціями нових методів. Робота з цими методами докладно описується у відповідній літературі [6; 7; 8], що спрощує практичне застосування їх для здійснення нечітких розрахунків.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Необхідно дослідити можливості застосування наявних методів, що реалізовані мовою програмування R , у задачах нечіткого оцінювання економічних величин на прикладі розрахунку показників у галузі нормування праці як нечітких чисел з подальшим порівнянням результатів, отриманих різними методами.

Виклад основного матеріалу дослідження. Теорія нечітких множин дає змогу досить інтуїтивно відображати неточні або нечіткі дані. Нечіткі числа ("fuzzy numbers") утворюють певний підклас нечітких множин, побудованих на підмножинах дійсних чисел. Згідно з визначенням нечітка множина A з функцією належності $\mu_A: R \rightarrow [0, 1]$ є нечітким числом, якщо вона має принаймні три такі властивості [5]: 1) це нормалізована нечітка множина, тобто $\mu_A(x_0) = 1$ для певного значення $x_0 \in R$; 2) функція належності є опуклою, тобто має місце $\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \mu_A(x_1) \wedge \mu_A(x_2)$ для будь-яких $x_1, x_2 \in R$ та $\lambda \in [0, 1]$; 3) множина носіїв нечіткої множини A є обмеженою.

Конкретний вид функцій належності визначається на основі різних додаткових припущень про властивості цих функцій (симетричність, монотонність, неперервність першої похідної тощо) з урахуванням специфіки наявної невизначеності та реальної ситуації [1; 3]. Зокрема, нечіткі числа з трикутною функцією належності $\mu(t)$ називаються трикутними нечіткими числами та позначаються $\tilde{t} = (t_{\min} / t_c / t_{\max})$, де $t_{\min}$, $t_{\max}$, t_c , що є мінімальним, максимальним значеннями і деякою оцінкою центрального значення (математичного сподівання, моди, медіани тощо) окремого параметра, а також мають функцію належності:

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{\min}}{t_c - t_{\min}}, & \text{для } t_{\min} \leq t \leq t_c, \\ \frac{t - t_{\max}}{t_c - t_{\max}}, & \text{для } t_c \leq t \leq t_{\max}. \end{cases} \quad (1)$$

Функції належності нечітких величин можуть бути отримані на основі експертної інформації, а також із застосуванням ймовірнісних методів, заснованих на використанні певної схожості понять нечіткості та ймовірності.

Так, на основі статистичних даних за вибраними економічними показниками, можуть бути

побудовані відповідні гістограми або полігони частот з числом інтервалів в межах від 7 до 12 згідно з рекомендаціями з побудови гістограм [3; 4]. Значення функції належності μ відповідного показника обчислюється для середини кожного інтервалу як відносна частота по відношенню до максимального значення частот. Такий спосіб нечіткого представлення величин на основі статистичних даних наведено в роботі [4]. Не маючи можливості точно визначити вид розподілу, з якого отримані вибірки, ми можемо оперувати тільки даними частотними характеристиками.

Таким чином, наприклад, можна отримати нечітку величину $A = \mu_a; [a; b] >$ з дискретизованою функцією належності μ_a , заданою на відрізку $[a; b]$, що розділений на m рівних частин: $[a; b] = [b_0; b_1] \cup [b_1; b_2] \cup \dots \cup [b_{m-1}; b_m]$, де $b_0 = a$, $b_m = b$. Кожному значенню b_i , $i = 0, m$ поставлене у відповідність значення функції належності μ_a , тобто μ_a – точкова функція належності, задана на відрізку $[a; b]$.

Для визначення параметрів розподілу величин, які є результатом виконання арифметичних операцій над випадковими величинами, в теорії ймовірностей не існує універсальних визначень і методів. Частіше за все є необхідною побудова моделюючих алгоритмів для отримання результуючих рядів розподілу [3].

В теорії нечітких множин, навпаки, розроблено цілу низку методів, що дають змогу отримувати результати виконання арифметичних операцій над нечіткими величинами. Серед них є аналітичні та чисельні методи, а також прямі й обернені методи. Для використання в практичних задачах автоматизованих розрахунків більш універсальними та зручними є, звичайно, чисельні методи [5]. У роботі [5] наведено таке визначення функції належності для нечіткої величини, що є результатом арифметичної операції над двома нечіткими величинами A і B :

$$\mu_{A \circ B}(z) = \sup_U \{ \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \}, \quad (2)$$

де $U = \{(x, y) \in \sigma(A \times B) | x \circ y = z\}$, $\{\circ\} \square$ – деяка операція з набору $\{+, -, *, /\}$.

Проведений у роботі [4] чисельний експеримент щодо пошуку результату множення двох нечітких величин A і B методами безпосереднього застосування формули для пошуку результату арифметичної операції над двома нечіткими величинами та методу повної розгортки частотних характеристик з подальшим перемноженням показав відсутність істотних відмінностей у побудованих результуючих функціях [4]. Але абсолютно очевидним є те, що обсяг обчислень за безпосереднього «перемноження» вибірок є істотно більшим.

Описаний вище метод визначення результату виконання арифметичних операцій над нечіткими величинами відноситься до прямих методів.

Окрім прямих, у теорії нечітких множин розроблено цілу низку обернених методів розв'язання поставленої задачі, як аналітичних, так і чисельних. До них відносяться так звані матричні методи. Один із них, описаний в роботі [5], дає змогу

знаходити рішення будь-якої арифметичної операції з набору $\{+, -, *, /\}$ за умови, що функції належності величин, що поєднуються цими операціями, є опуклими, крім того, для операції ділення необхідне дотримання такої умови: $0 \in [c; d]$, де $[c; d]$ – носій нечіткої величини дільника.

Відмінність обернених методів від прямих полягає в тому, що дискретизація функції належності ведеться не по параметру X , а по величині $\alpha \in [0; 1]$, тобто будуються α -рівневі множини для значень $\alpha = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$. Але в цьому разі виникає додаткова задача визначення значення x_i для кожного рівня α , оскільки під час побудови функції належності по полігону частот проводиться рівномірне розбиття по параметру X , що не дає гарантії мати точні значення α в одержаних точках розбиття.

Не підлягає сумніву необхідність автоматизації розрахунків з визначення результатів арифметичних операцій над нечіткими величинами або нечіткими числами. Застосування описаних вище методик вимагає впровадження обчислювальної техніки для реалізації таких алгоритмів.

R – це вільна мова з відкритим кодом, яка вже широко використовується в різних галузях (від комп'ютерних наук до соціальних). Таким чином, надання вільно доступного програмного забезпечення для використання неklasичних нечітких систем у рамках пакета R дає змогу практикам та дослідникам з широкого спектру галузей використовувати у своїй роботі розробки всієї дослідницької спільноти у своїх дослідженнях.

Нечіткі числа, які відіграють важливу роль у багатьох практичних застосуваннях, мають програмну реалізацію у пакеті R . Fuzzy Numbers (package “Fuzzy Numbers”) – це пакет з відкритим кодом для мови програмування R . Це безкоштовне програмне середовище для статистичних обчислень та візуалізації, яке працює на всіх основних операційних системах, тобто Windows, Linux і MacOS [8]. Fuzzy Numbers створено для зручного та ефективного використання нечітких чисел та виконання різних операцій з нечіткими величинами.

Нечітке число A можна задати, вказавши його ядро, носій або ліву/праву бокові функції чи нижні/верхні межі α -розрізів [8]. На практиці більшість алгоритмів, що працюють з нечіткими числами, припускає використання щонайменше останніх, тобто α -розрізів.

Нечітке число, задане за допомогою бокових функцій має таку форму функції належності [8]:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < a_1 \\ \text{left} \left(\frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \right), & \text{якщо } a_1 \leq x < a_2 \\ 1, & \text{якщо } a_2 \leq x \leq a_3 \\ \text{right} \left(\frac{x - a_3}{a_4 - a_3} \right), & \text{якщо } a_3 < x \leq a_4 \\ 0, & \text{якщо } a_4 < x \end{cases},$$

де $a_1, a_2, a_3, a_4 \in R, a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, *left* – неспадаюча функція (лівий генератор A), *right* – незростаюча функція (правий генератор A).

Наприклад, нечітке число за лінійними боковими функціями (трапецієподібне число) може бути задане так [8]:

$A1 <- \text{FuzzyNumber}(1, 2, 4, 7, \text{left}=\text{function}(x) \ x, \text{right}=\text{function}(x) \ 1-x)$.

Для графічного представлення заданого нечіткого числа використовують команду `plot(A1)` (рис. 1).

Аналогічне трапецієподібне нечітке число також може бути задане за допомогою функції, а саме `TrapezoidalFuzzyNumber(1, 2, 4, 7)`. Тобто для завдання такого числа необхідно вказати чотири параметри: $a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$.

У пакеті Fuzzy Numbers забезпечено реалізацію методів виконання арифметичних операцій над нечіткими числами. Тоді як додавання і віднімання є досить простими операціями, множення та ділення, на жаль, залишаються незамкненими і виявляються більш складними [6].

Запропоновані методи можна застосовувати під час роботи з економічними показниками нечіткої природи для врахування невизначеності, пов'язаної з нечітким оцінюванням їх складових. Розглянемо можливості застосування цих методів на прикладі встановлення нечіткого значення тривалості виконання технологічної операції T , що складається з декількох елементів, тривалість яких встановлена нечітко, у вигляді нечітких чисел. Параметри для нечіткого опису кожного елементу операції розраховані на основі аналізу статистичних даних хронометражних спостережень за тривалістю елементів операцій на одному робочому місці за одну зміну (табл. 1). Використовуючи нечіткі тривалості кожного елементу цієї операції, ми можемо визначити тривалість всієї операції за допомогою різних методів виконання арифметичних

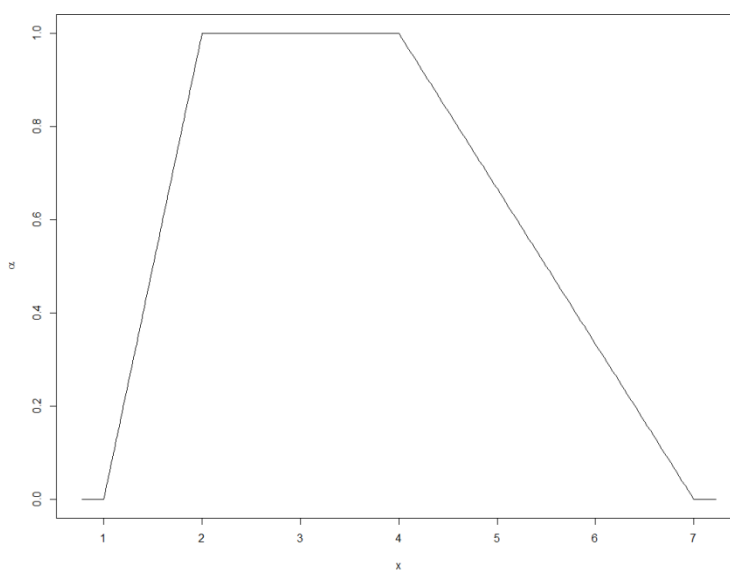


Рис. 1. Функція належності трапецієподібного нечіткого числа A1

операцій над нечіткими числами. Дані хронометражних спостережень визнаються сталими, оскільки коефіцієнти сталості $K_{cm} = \max/\min$ не перевищують допустимі значення для цього типу виробництва [4].

Для опису тривалості елементів технологічної операції можна використовувати трикутні або трапецієподібні нечіткі числа. Для трапецієподібних чисел використаємо значення меж ентропійного інтервалу як інтервалу, на якому

функція належності дорівнює 1. Чотири параметри для кожного опису числа задані в табл. 2.

Застосовуючи засоби мови програмування R, послідовно знайдемо суми описаних вище нечітких чисел для трикутних, а також трапецієподібних функцій належності [7]. Результати нечітких розрахунків узагальнимо в табл. 3, а також дамо графічне зображення результуючої функції належності для двох згаданих форм, а саме трикутної (рис. 2) та трапецієподібної (рис. 3).

Таблиця 1

Дані спостережень за тривалістю трудових операцій

Номер спостереження	Тривалість елементу операції, с				
	Взяти заготовку, установити та закріпити	Увімкнути верстат, відвести інструмент	Обточити деталь на один прохід	Відвести інструмент, зупинити оберти	Розкріпити, зняти, відкласти
1	9	3	103	4	5
2	10	5	102	3	6
3	7	4	115	5	7
4	11	3	118	4	5
5	14	4	121	6	9
6	8	5	136	4	7
7	12	7	139	6	6
8	11	6	110	5	10
9	13	4	128	4	8
10	8	5	125	6	6
K_{cm}	2	2,33	1,36	2	2

Таблиця 2

Нечіткі тривалості елементів технологічної операції

Елемент	Позначення	Вид числа	Параметри нечітких чисел, с			
			a_1	a_2	a_3	a_4
Взяти заготовку, установити та закріпити	T_1	трикутне	7	10,47	10,47	14
		трапецієподібне	7	8,89	12,03	14
Увімкнути верстат, відвести інструмент	T_2	трикутне	3	4,74	4,74	7
		трапецієподібне	3	3,97	5,51	7
Обточити деталь на один прохід	T_3	трикутне	102	121,61	121,61	139
		трапецієподібне	102	113,97	129,21	139
Відвести інструмент, зупинити оберти	T_4	трикутне	3	4,78	4,78	6
		трапецієподібне	3	4,00	5,45	6
Розкріпити, зняти, відкласти	T_5	трикутне	5	7,05	7,05	10
		трапецієподібне	5	5,97	8,14	10

З графіків функцій належності результуючих показників видно, що під час виконання операції додавання форма результуючої функції належності співпадає з формою функції належності доданків, а інтервал носія нечіткого числа, що визначає тривалість всієї технологічної операції, не залежить від форми функції належності.

Різниця між отриманими результатами полягає в їх інтерпретації у кожному конкретному випадку. Так, для трапецієподібних функцій

певний інтервал усередині носія має більший ступінь можливості, функція належності в ньому є максимальною.

Отже, отримаємо нечітку тривалість виконання всієї операції у вигляді трикутного числа та трапецієподібного числа:

- Trapezoidal Fuzzy Number (120, 148.65, 148.65, 176) с;
- Trapezoidal Fuzzy Number (120, 137.88, 159.25, 176) с.

Таблиця 3

Обчислення нечіткої тривалості виконання технологічної операції

Позначення	Вид числа	Параметри нечітких чисел, с			
		a_1	a_2	a_3	a_4
$T_1 + T_2$	трикутне	10	15,21	15,21	21
	трапецієподібне	10	12,86	17,54	21
$T_3 + T_4$	трикутне	105	126,39	126,39	145
	трапецієподібне	105	117,97	134,66	145
$T_1 + T_2 + T_3 + T_4$	трикутне	115	141,6	141,6	166
	трапецієподібне	115	130,83	152,2	166
$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$	трикутне	120	148,65	148,65	176
	трапецієподібне	120	137,88	159,25	176

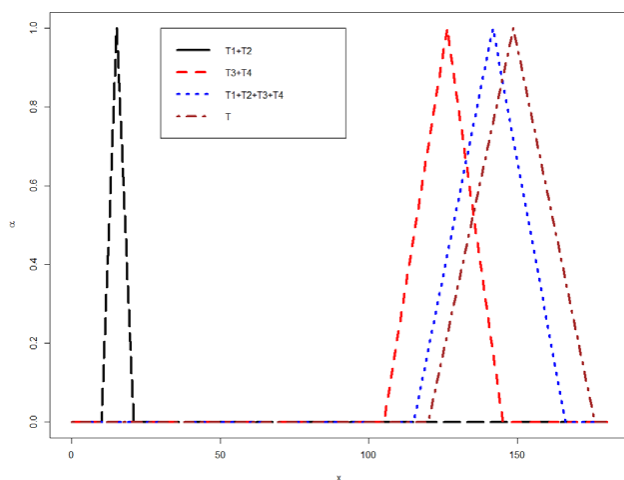


Рис. 2. Функції належності тривалості операції та її елементів у вигляді трикутних нечітких чисел

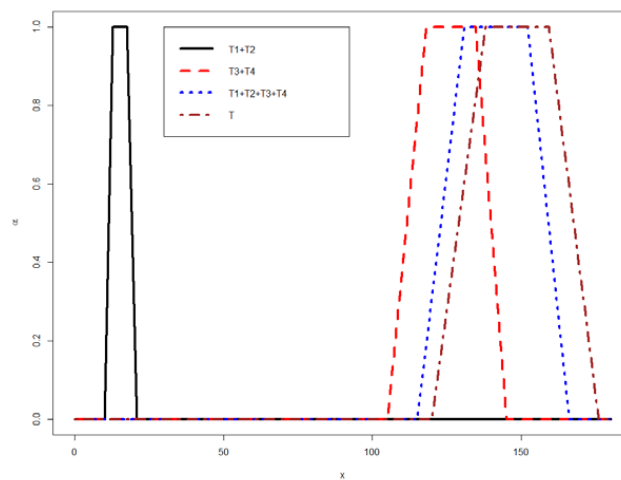


Рис. 3. Функції належності тривалості операції та її елементів у вигляді трапецієподібних нечітких чисел

Висновки. Висловлений підхід до моделювання невизначеності в економічних показниках за допомогою нечітких чисел дає чималі можливості для того, щоб одержувати найбільш адекватні оцінки цих показників із використанням усієї наявної інформації щодо їх структури й динаміки. Крім того, мова програмування R відкриває широкі шляхи до автоматизації розрахунків з використанням нечітких уявлень про економічні показники. Ми показали, що цей підхід є досить об'єктивним з точки зору формалізованого опису наявної невизначеності в будь-яких економічних показниках, зокрема тих, що використовуються в нормуванні праці.

Подальші дослідження щодо практичного застосування методів виконання арифметичних операцій над нечіткими числами для обчислень нечітких значень економічних показників дадуть змогу досягнути більш адекватного опису присутньої в них невизначеності.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Zadeh L.A. Fuzzy set. Information and Control. 1965. Vol. 8. No. 3. P. 338–353.

2. Игумнов Б.Н. Кибернетические основы построения экономических систем для предприятий: учеб. пособие. Хмельницкий: ТУП, 2000. 344 с.
3. Горбатюк Е.В. Экономико-математические модели в нормировании труда: монография. Хмельницкий: НВП «Еврика» ТОВ, 2001. 212 с.
4. Горбатюк К.В. Математичні моделі в нормуванні праці на базі теорії нечітких множин: монографія. Хмельницький: ХНУ, 2013. 158 с.
5. Алтуни А.Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: монография. Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2000. 352 с.
6. Shang G., Zaiyue Zh., Cungen C. Multiplication Operation on Fuzzy Numbers. Journal of Software. 2009.
7. Gagolewski M., Caha J. Fuzzy Numbers Package: Tools to Deal with Fuzzy Numbers in R. 2018. URL: <http://FuzzyNumbers.rexamine.com>.
8. Gagolewski M., Caha J. A Guide to the Fuzzy Numbers Package for R. Technical report. 2015.

REFERENCES:

1. Zadeh L.A. (1965). "Fuzzy set", Information and Control, vol. 8, no. 3, p. 338–353.
2. Igumnov B.N. (2000). Kiberneticheskie osnovy postroeniya je-konomiceskikh sistem dlja predpriyatij [Cybernetic bases of con-

- struction of economic systems for the enterprises], Hmel'nickij, TUP, Ukraine.
3. Horbatiuk E.V. (2001). Jekonomiko-matematicheskie modeli v normirovanii truda : monografija [Economic-mathematical models in the labor standardization: monograph]. Hmel'nickij: NVP "Evrika" TOV, Ukraine.
 4. Horbatiuk K.V. (2013). Matematychni modeli v normuvanni pratsi na bazi teorii nechitkykh mnozhyn: monohrafiia [Mathematical models in the labor standardization on the basis of the fuzzy sets theory: monograph]. Khmelnytskyi: KhNU, Ukraine.
 5. Altunin A.E. (2000). Modeli i algoritmy prinjatija reshenij v nechetkih uslovijah: monografija [Models and algorithms of decision-making in fuzzy conditions: monograph]. Tjumen': Izdatel'stvo Tjumenskogo gosudarstvennogo universiteta, Russia.
 6. Shang Gao & Zaiyue Zhang & Cungen Cao (2009). "Multiplication Operation on Fuzzy Numbers". Journal of Software.
 7. Gagolewski M., Caha J. (2018). FuzzyNumbers Package: Tools to Deal with Fuzzy Numbers in R. Available at: <http://FuzzyNumbers.rexamine.com>.
 8. Gagolewski M., Caha J. (2015). A Guide to the Fuzzy Numbers Package for R. Technical report.

Horbatiuk K.V.

*Candidate of Economic Sciences, Senior Lecturer at Department of
Automated Systems and Modelling in Economics,
Khmelnytskyi National University*

APPLICATION OF R PROGRAMMING LANGUAGE FOR FUZZY EVALUATION OF ECONOMIC INDICATORS

The article is devoted to the problem of evaluating of economic indicators in different sectors of the economy when it is necessary to take into account incomplete information and make managerial decisions in conditions of uncertainty and risk. The author pays attention to the methodological basis of the representation of economic indicators by fuzzy numbers and considers different methods of evaluating the results of arithmetical operations over fuzzy numbers. The main problems of the fuzzy approach to evaluating economic indicators are outlined in the paper. Some of them can be solved by the methods of fuzzy computing of the economic indicators, which take into account incomplete information and represent their values as fuzzy numbers, using all available information.

The overview of scientific approaches to the fuzzy evaluation of economic indicators is done. In the fuzzy sets theory, a number of methods have been developed that allow obtaining the results of performing arithmetic operations over fuzzy numbers. Among the existing methods based on theoretical results, there are analytical and numerical methods, as well as direct and inverse methods, whose goal is to construct the resulting fuzzy numbers that can take into account the information about the uncertainty in the values of their components, which influence the economic indicators.

The tools of R programming language were applied for the evaluating of economic indicators, which are used in labour standardization problems. There were used the FuzzyNumbers package, which is an open-source package for R – a free software environment for statistical computing and graphics, which runs on all major operating systems. This package has been created in order to deal with fuzzy numbers conveniently and effectively. There were constructed and evaluated the fuzzy numbers of the length of the execution of a technological operation and its elements by R programming language tools.

The study of the evaluation of economic indicators as fuzzy numbers using the R programming language tools is extremely important for the effective representation of the uncertainty in their values.