СЕКЦІЯ 10
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 336.187.44:368(477)

Кисільова І.Ю.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Запорізький національний університет

ТЕОРЕТИЧНА ОЦІНКА РОЗПОДІЛУ СТРАХОВОЇ ПРЕМІЇ

АНОТАЦІЯ

Отримана диференціальнія функція розподілу страхових виплат у вигляді нормального розподілу. Із застосуванням імовірнісного підходу отримано розподіл страхової премії у вигляді гаусівського (нормального) закону із використанням диференціальної функції розподілу страхових виплат та функції перетворення випадкових величин.

Ключові слова: густина дислокацій, розподіл, гаусівський (нормальний) закон, страхові виплати, страхові премії.

АННОТАЦИЯ

Получена дифференциальная функция распределения страховых выплат в виде нормального распределения. С использованием вероятностного подхода получено распределение страховой премии в виде гауссовского (нормального) закона с использованием дифференциальной функции распределения страховых выплат и функции преобразования случайных величин.

Ключевые слова: плотность дислокаций, распределение, гауссовский (нормальный) закон, страховые выплаты, страховые премии.

ANNOTATION

Using stochastic method the distributon of insurance premium has been obtained in Gauss (normal) form. Using stochastic method the distributon of insurance premium has been obtained in Gauss (normal) form using differential function of insurance payment and random variables conversion function.

Key words: dislocation density, distributon, Gauss (normal) law, insurance payment, insurance premium.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями. Надійність учасників-страховиків є головною умовою ефективного функціонування страхового ринку. Підтримка здатності кожного страховика, який працює на ринку, до своєчасного та у повному обсязі виконання зобов'язань, тобто фінансової стійкості, є відправною точкою для фактичної реалізації функцій страхування.

При цьому сучасний стан фінансових інструментів страхових організацій вимагає пошуку нових форм і методів підвищення конкурентоспроможності та фінансової стабільності, тому є очевидною необхідність створення більш ефективних систем оцінювання фінансового стану страхових компаній і підвищення фінансової стійкості. Визначення ймовірності розорення страхової компанії є одним із найбільш важливих завдань страхової математики, на якій будуються основні актуарні концепції оцінки фінансової стійкості. Інформація про ймовірність розорення дає змогу знайти оптимальну величину страхового тарифу та внеску.

Зазвичай для оцінки величини страхового тарифу використовують статичний підхід, за якого розглядають середні значення важливих чинників. Динамічний підхід передусім приділяє увагу розподілам та динаміці зміни параметрів (величини страхових виплат, кількості договорів тощо) і пов'язаному із ними розподілу страхових тарифів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Застосуванню стохастичного підходу для дослідження математичних моделей страхових компаній присвячено низку робіт вітчизняних дослідників.

У роботі О.В. Жуміка та Ю.А. Стадника [1, с. 151-152] розглядається модель банкрутства страхової компанії на основі знаходження ймовірності банкрутства, яка визначається за допомогою різних математико-статистичних підходів. У роботі В.А. Диби [2] запропонована багатоступінчаста стохастична модель ефективного управління активами та пасивами страхової компанії ощадливого типу, що дозволяє знаходити оптимальний розподіл отриманого інвестиційного прибутку та очікуваний баланс для кожного модельованого періоду, розподіл ймовірностей дефіцитів страхового резерву, а також стан кожного регулюючого обмеження для кожного типу активів компанії. У дисертаційній роботі В.О. Болдирєвої [3] для досліджень імовірності розорення страхових компаній використано методи стохастичного обчислення, методи теорії випадкових процесів та методи розв'язання стохастичних диференціальних рівнянь.

Однак можна констатувати, що натепер відсутнє застосування стохастичного динамічного підходу до аналізу страхових тарифів та відсутні дослідження стохастичного зв'язку між страховими тарифами та параметрами впливу, зокрема страховими виплатами.

Формулювання цілей статті **(постановка завдання).** У зв'язку із цим було визначено такі завдання:

– визначити функціональний зв'язок між страховими преміями та страховими виплатами з використанням принципу еквівалентності;

– визначити вид диференціальної функції розподілу величини страхових виплат;

– з використанням методу перетворень випадкових величин отримати розподіл величини страхової премії.

Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням здобутих наукових результатів. Розмаїття форм прояву ризиків, частоти і тяжкості наслідків їх реалізації викликає необхідність поглибленого аналізу ризику й економіко-математичного обґрунтування фінансової політики страхової компанії. Використання економіко-математичних методів дає змогу отримати більш обґрунтовані і достовірні оцінки основних характеристик фінансової стійкості (ймовірність розорення, маржа платоспроможності, власний капітал, страхові тарифи тощо).

Відмінності актуарних моделей полягають в тому, які припущення про розподіл страхових платежів (та їх розмір) і тимчасові інтервали між платежами покладено в побудову моделі. Страхові виплати можуть мати однакові розподіли із відомими функціями розподілу, розподіл із довільною функцією, нерівномірний розподіл тощо; інтервали між платежами можуть характеризуватися неоднаковими показниковими розподілами, послідовність виплат можна також описати за допомогою пуасонівського процесу. Деякі моделі дозволяють враховувати додаткові функції, такі як виплата дивідендів засновникам (учасникам) [4, с 2-4; 5].

Такі дослідження фінансової стабільності з погляду багатогранності проблеми є недостатніми, але воно дозволяє використати формальні економіко-математичні моделі для отримання оцінок, які є підставою для прийняття рішень керівниками страхових компаній.

На практиці дуже важливо надати точні якісні оцінки фінансовій стійкості страхової компанії. Однак ця проблема є досить складною, що пов'язано з тим, що економіко-математичні моделі не враховують усіх можливих факторів. Крім того, їх вплив на кінцеві показники часто не може бути виражений аналітичними залежностями, у зв'язку з чим для одержання оцінок фінансової стабільності слід використовувати наближені методи. Однак застосування економіко-математичного апарату дає змогу значно підвищити обґрунтованість прийняття рішень щодо управління фінансовою стабільністю.

Розглянемо особливості застосування математичних методів для оцінки ризиків у страхуванні:

Методи математичного аналізу страхових ризиків та фінансової стійкості страхових компаній зазвичай будуються на основі теорії індивідуальних і колективних ризиків, які можуть бути використані як для короткострокових, так і для довгострокових видів страхування, зокрема страхування життя, що вимагають урахування впливу часу.

Модель індивідуального ризику заснована на аналізі впливу кожного окремого ризику, прийнятого на страхування, на загальний обсяг страхових платежів. З математичної позиції сукупний обсяг страхових платежів для кожного ризику розглядається як сума випадкових величин, приймаючи або нульове значення, або значення, яке відповідає фактичним платежам. Модель індивідуального ризику будується на основі таких припущень [6, с. 77]:

– аналізується фіксований відносно короткий проміжок часу (для того щоб можна було знехтувати інфляцією і не враховувати дохід від інвестування активів), зазвичай це один рік;

– число договорів страхування фіксоване і не випадкове;

– премія повністю вноситься на початку аналізованого періоду; ніяких надходжень протягом цього періоду немає;

– розглядається кожен окремий договір страхування, при цьому відомі статистичні властивості пов'язаних із ним індивідуальних втрат.

Доцільною є побудова саме динамічних моделей, які дають змогу врахувати залежність від часу (динаміка ризику) за зборами і виплат страхової компанії. Достатність страхових резервів визначається за допомогою граничної ймовірності достатності коштів для покриття сукупних виплат упродовж досліджуваного періоду. Залежності від наявної інформації можна отримати оцінку на основі функції розподілу.

Ризик страхового портфеля загалом можна визначити як зіставленням випадкової величини зобов'язань із отриманою премією та резервами, так і з використанням стохастичного аналізу перевищення доходу страхової компанії (отриманих премій) над витратами (зобов'язаннями).

Одним із ключових параметрів, що визначають фінансову стабільність страхової компанії і стан її активів, є розмір тарифної ставки, яка є визначеною ціною невизначених зобов'язань. Розрахунок страхових внесків, або знаходження процесу $V(T)$, є однією з найбільш комплексних і практично важливих задач. Як уже зазначалося, з одного боку, премії повинні гарантувати виплати за вимогами страхувальників, а з іншого – бажано враховувати умови конкуренції.

Розрахунок тарифних ставок, як правило, проводиться на основі накопиченої статистики. Страхові премії $V(T)$ в часовому інтервалі $[0, t]$ розраховуються таким чином [6, с. 82-83]:

$$V(t) = (1 + \theta) \cdot E(U), \tag{1}$$

де U – страхові виплати; θ – константа (коефіцієнт навантаження).

Така структура тарифу випливає з принципів еквівалентності відносин страховика та страхувальника та фінансової стійкості страхової компанії. Наведена формула (1) означає, що в середньому загальні премії мають бути більшими за кумулятивні виплати за вимогами страхувальників (премія має назву нетто-премії, а сам принцип обчислення нетто-премії – принципу еквівалентності). Обчислення адекватної премії полягає у побудові процесу V(t) по функції розподілу процесу ризику Fx(t). При цьому важливо визначити премію за простими характеристиками процесу x: математичним сподіванням та дисперсією.

Розглянемо індивидуальну модель ризику. Нехай портфель складається з n полісів з виплатами («ризиками») U_1, U_2, …, U_n, які являють собою невід'ємні незалежні випадкові величини. Тоді процес ризику являє собою розподіл $F(U_1) \cdot \ldots \cdot F(U_n)$.

Припустимо, що страхова компанія укладає n договорів страхування життя з певним терміном дії. За одним договором страхування припускається не більше однієї вимоги. Виплати за і-ю вимогою – випадкова величина Ui, яка може дорівнювати нулю. Тоді сума, яку компанія сплачує клієнтам, є в цьому разі процесом ризику: $X_{ind} = \sum U_i$.

Відшкодування збитку за вимогами страхувальників відбувається в момент закінчення терміна поліса, у зв'язку з ймовірністю розорення слід вважати $p\{X_{ind} > u + V\}$, де u – початковий капітал; V – зібрані за цей термін премії.

Величина страхових виплат є випадковою величиною та характеризується певним розподілом, і внаслідок цього страхові премії також є випадковою величиною. Тому доцільно провести стохастичне дослідження страхової діяльності та оцінити диференціальні функції розподілів параметрів страхових премій, які пов'язані із розподілами страхових виплат. Розглянемо застосування стохастичного підходу для оцінки розподілу страхової премії з використанням диференціальної функції розподілу величини страхових виплат.

Розглянемо умовний приклад страхової організації, яка займається страхуванням життя. Введемо до розгляду випадкову величину U – величину страхових виплат, можливі значення якої позначимо u. Для статистичного дослідження використаємо дані щодо величини збитків, які було згруповано в інтервальні статистичні ряди для випадкових величин (обсяг вибірки N = 80). Для отримання диференціальної функції розподілу величин страхових виплат визначено центри інтервалів статистичного ряду, частоти та відносні частоти.

За результатами визначення величин страхових виплат побудовано гістограми статистичних рядів. Для перевірки гіпотези про існування нормального розподілу використано критерій Пірсона [7, с. 158-159]:

$$\overline{\chi^2} = \sum \frac{(m_i - Np_i)^2}{Np_i}, \qquad (2)$$

де m – відносна частота; N – кількість інтервалів.

Теоретичну ймовірність P_i визначено для кожного інтервалу $[u_{i-1}, \ u_i]$ варіаційних рядів за допомогою функції Лапласа $P_i = \Phi\left(\frac{u_i - \bar{u}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{u_{i-1} - \bar{u}}{S}\right)$ [7, с. 54], i = (1, 2….5). Розрахункове значення критерію χ^2 дорівнює $\overline{\chi^2} = 5,328$.

При цьому табличне значення критерію χ^2 (за рівня значущості α = 0,05) дорівнює χ^2 (0,05;2) = 5,991 [7, с. 272]. Порівняння вибіркової та табличної величин критерію Пірсона підтверджує гіпотезу про існування нормального розподілу величини страхових виплат, тобто можна дійти висновку, що немає підстав для відхилення гіпотези про існування нормального розподілу страхових виплат. Отже, в загальному вигляді диференціальну функцію розподілу страхових виплат можна представити так:

$$f(U) = \frac{1}{S_u\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u - \bar{u}}{S_u}\right)^2\right], \qquad (3)$$

де $\bar{u}$ – математичне сподівання страхових виплат; S_u – стандарт розподілу страхових виплат.

Таким чином, експериментальні дослідження і статистична обробка результатів показали, що процес виплат за договорами страхування характеризується нормальним розподілом.

Визначимо диференціальну функцію розподілу страхової премії.

Введемо в розгляд випадкову величину V, можливими значеннями якої є значення страхової премії v(x), та функцію розподілу Q(v) для випадкової величини V:

$$Q(v) = \int_a^{u(v)} f(u)du, \qquad (4)$$

де u(v) – залежність страхових виплат та страхових премій, отримана із (1); f(u) – диференціальна функція розподілу величини страхових виплат.

Для отримання диференціальної функції розподілу страхової премії застосуємо методику перетворення функцій випадкового аргументу [7, с. 58]. Диференціальну функцію q(v) випадкової величини V визначимо шляхом диференціювання інтегральної функції (4) за змінною v. Оскільки остання є аргументом функції верхньої межі цього інтеграла, то q(v) визначимо таким чином:

$$q(v) = f'[\tau(v)]\left|\frac{du}{dv}\right|. \qquad (5)$$

Раніше було показано, що страхові виплати f(v) характеризуються нормальним розподілом (3). Після підстановки (3) в (5) з використанням (1) та проведення перетворень отримаємо диференціальну функцію розподілу страхової премії у вигляді нормального закону:

$$q(v) = \frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{v - m_v}{\sigma_v}\right)^2\right], \qquad (6)$$

де числові характеристики розподілів страхових виплат: m_v – математичне сподівання та σ_v – середньоквадратичне відхилення величини страхової премії.

Також можна оцінити трисигмовий інтервал, що дозволить страховій організації визначити такий рівень премії, який із достатньою ймовірністю забезпечить виконання принципу еквівалентності.

Висновки із цього дослідження і подальші перспективи досліджень у цьому напрямі. Таким чином, показано, що за умов нормального розподілу величини страхових виплат страхові премії також характеризуються нормальним (гаусівським) розподілом. Для цього використана методика перетворення випадкових величин. Застосування запропонованої методики забезпечує надійність визначення і прогнозування страхових премій та тарифів.

Отримані диференціальні функції розподілу величини страхових премій можуть бути використані для встановлення адекватних тарифів та для планування надходжень страхових внесків. Можна дійти висновку, що запропонований стохастичний підхід оцінки розподілу величини страхових зобов'язань адекватно описує реальні процеси.

Подальшим напрямом розроблення цієї проблеми є дослідження розподілів інших складників, які впливають на величину страхових зобов'язань, та уточнення отриманої моделі. Шляхами вдосконалення запропонованої методики є визначення надійності оцінки премій і тарифів та дослідження поведінки коефіцієнтів варіації та їх впливу на надійність оцінки.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Жумік О.В. Застосування методів актуарної математики для визначення ймовірності банкрутства страхової компанії / О.В. Жумік, Ю.А. Стадник. Науковий вісник Херсонського державного університету. Серія Економічні науки. 2014. Вип. 8. С. 149-152.
2. Диба В.А. Використання стохастичного моделювання для забезпечення стабільного розвитку страхових компаній заощадливого типу на ринку України / В.А. Диба. URL: http://ev.fmm.kpi.ua/article/download/108710/103658.
3. Болдирєва В.О. Моделювання та аналіз діяльності страхових компаній, що працюють на (B,S)-ринку: автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.01. Київ, 2016. 20 с.
4. Марецка Е. Математичні моделі страхування життя / Е. Марецка. Вісник Львівського університету. Серія Прикладна математика та інформатика. 2002. Вип. 5. С. 1-6.
5. Галь С.В. Математичні моделі в діяльності страхових компаній / С.В. Галь, О.О. Антонець. URL: http://www.kpi.kharkov.ua /archive/microcad/2016/s26/s320.pdf.
6. Казак А.Ю. Финансовые риски в страховом бизнесе / А.Ю. Казак, Ю.Э. Слепухина. – Философия экономики и экономическая наука. URL: /18311/1/iuro-2010-77-07.pdf.
7. Герасимович А.И. Математическая статистика / А.И. Герасимович. Мн.: Высшая школа, 1983. 279 с.

REFERENCES:

1. Zhumik, O.V., Stadnik, Yu.A. (2014), "The application of actuarial mathematics methods for determination of the probability of an insurance company bankruptcy", Scientific bulletin of Kherson state university Seria Economichni nauky. issue 8, part 5, pp. 149-152.
2. Dyba, V.A. (2018), "Using the stochastic modelling for ensuring stable development of the insurance companies saving type in the Ukrainian market", available at: http://ev.fmm.kpi.ua/article/download /108710/103658 (Accessed 07 January 2018).
3. Boldyreva, V.O. (2016), "Modeling and analysis of the insurance companies that operate in the (B,S)-market". Ph.D. Thesis, Theoretical bases of computer science and cybernetics, V.M. Glushkova Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine.
4. Marecka, E. (2002) "Mathematic modeling of life insurance", economic bulletin of Lviv university. Theoretical bases of computer science and cybernetics, issue. 5, pp. 1-6.
5. Gal, O.A. and Antonetz, O.O (2013), "Mathematic modeling in insurance companies activity", available at: http://www.kpi.kharkov.ua /archive/microcad/2016/s26/s320.pdf (Accessed 07 January 2018).
6. Kazaк, A.Yu. and Slepuhina Yu.E. (2009) Financial risks in insurance business. – Filosofia ekonomiky i ekonomicheskaya nauka, [Online], available at: http://elar.urfu.ru/bitstream/10995 /18311/1/iuro-2010-77-07.pdf (Accessed 07 January 2018).
7. Gerasimovich, A.I. (1983), Matematicheskaya statistika [Mathematical statistics], Vysshaya shkola, Minsk, Belarus.

Kysilova I.Yu.
Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor,
Zaporizhzhia National University

THEORETICAL ESTIMATION OF INSURANCE PREMIUM DISTRIBUTION

The insurance premium is the defined price of uncertain liabilities and determines the financial stability of insurance company. The calculation of insurance premium is the most complex and practically important problem. The value of insurance payments is the random variable and is characterized by some distribution and, in consequence, the insurance premium is also a random variable. Most of the existing models of insurance premium calculation do not take into account all factors. That is why the stochastic method is reasonable to estimate the distribution of insurance premium which, in one's turn connected with insurance payments differential function.

Functional dependence between insurance premium and insurance payments is obtained using the principle of equivalence of liabilities.

For a life insurance company, the histogram of statistic rows using the results of insurance payments measurements is built. To test the hypothesis of the existence of a normal distribution, the Pearson criterion is used. Comparison of sample and table Pierson criteria confirms the hypothesis of the existence of normal (Gauss) distribution of insurance premium value. The differential function of insurance payments and its premium average of distribution and mean square deviation are defined.

It is shown that on the assumption of normal distribution of insurance payments value, the insurance payment is also characterized by normal (Gauss) distribution. For that purpose, the method of random variable function transformation is used. Knowing the insurance premium average of distribution and mean square deviation, one can define the insurance premium make-out interval.

The continuation of the present study is an investigation of other factors influencing the insurance liabilities' value and specification of the obtained model, as well as insurance premium reliability estimation.