

## СЕКЦІЯ 10 МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.8

**Ставицький О.В.**

*кандидат економічних наук,  
доцент кафедри математичного моделювання економічних систем  
Національного технічного університету України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

**Дятлова Н.О.**

*студентка  
Національного технічного університету України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

### МЕТОДОЛОГІЯ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРИ В ЕКОНОМІЦІ

### METHODOLOGY OF MATHEMATICAL MODELS LOTKA-VOLTERRA IN ECONOMY

**АНОТАЦІЯ**

Статтю присвячено сутності математичної моделі Лотки-Вольтерри та можливостям її прикладного застосування в дослідженні економічних процесів. Моделювання в роботі здійснюється за допомогою програмного середовища «Matlab». На основі абстрактного прикладу, що приведений у статті, можуть здійснюватися моделювання і прогнозування подальшого розвитку багатьох взаємопов'язаних економічних об'єктів та явищ.

**Ключові слова:** математична модель, циклічність, динаміка, прогнозування, моделювання економічних систем.

**АННОТАЦИЯ**

Статья посвящена сущности математической модели Лотки-Вольтерры и возможностям ее прикладного использования в исследовании экономических процессов. Моделирование в работе осуществляется с помощью программной среды «Matlab». На основе абстрактного примера, приведенного в статье, могут осуществляться моделирование и прогнозирование дальнейшего развития множества взаимосвязанных экономических объектов и явлений.

**Ключевые слова:** математическая модель, цикличность, динамика, прогнозирование, моделирование экономических систем.

**ANNOTATION**

The article is devoted to the essence of the Lotka-Volterra mathematical model and the possibility of its practical use in the study of economic processes. Modeling in this paper is implemented by using «Matlab» software environment. Based on the abstract example in this article can be carried out modeling and future development forecasting of quantity of interrelated economical objects or phenomena.

**Key words:** mathematical model, cyclicity, dynamics, making predictions, modelling of economic systems.

**Постановка проблеми.** Економічні системи нині залишаються складно передбачуваними. Для здійснення прогнозів використовують математичне моделювання, що дає змогу проілюструвати економічні процеси і зробити висновки. Безліч математичних моделей знаходить своє застосування в економіці залеж-

но від безпосереднього об'єкта моделювання і сфери дослідження.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Сучасна економіка належить до відкритих економічних систем. Вона є досить непередбачуваною, адже її «елементарною часткою» є людина, що є важко передбачуваним і складним об'єктом. Відкритою є система, що взаємодіє з навколишнім середовищем і безпосередньо залежить від нього, на відміну від закритої, що є самодостатньою і повністю незалежною.

Характерною рисою економіки є її циклічність. Економічні цикли можуть бути короткостроковими (3-5 років), а можуть досягати десятків років. Сьогодні для опису економічних циклів використовують безліч математичних моделей.

Використання математичних моделей доцільно у біології, економіці, інформатиці, медицині, хімії та фізиці.

Дослідженнями ефективного управління економікою займалися як закордонні, так і вітчизняні вчені. Серед них слід назвати таких, як Є.Б. Алаєва, В.А. Жаміна, Н.А. Журавльова, В.Є. Попова, С.О. Юрченко. В останні десятиріччя в екології, економіці та інших наукових сферах широко використовується проста модель «хижак – жертва», або модель Лотки-Вольтерри. Вона дає змогу комплексно дослідити динаміку економічних процесів і спрогнозувати поведінку основних параметрів моделі. Модель Лотки-Вольтерри добре ілюструє зміну станів економічної системи за зміни її параметрів.

**Формулювання цілей статті (постановка завдання).** Мета статті полягає у вивченні математичної моделі «хижак – жертва», або моделі

Лотки-Вольтерри, та можливостей її застосування в економічній сфері.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Математична модель – це наближений опис довільного класу явищ або процесів зовнішнього світу, поданий у вигляді математичної системи співвідношень. Математичне моделювання виступає як метод пізнання, прогнозування й управління. Аналіз математичних моделей дає змогу проникнути в сутність досліджуваних явищ.

Модель Лотки-Вольтерри (або рівняння «хижак – жертва») – система двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, що описує динаміку чисельності популяції з одним типом хижаків і одним типом жертв. Характерною особливістю рівнянь є те, що їх розв'язком є автоколивання. Рівняння було запропоновано незалежно вченими Альфредом Джеймсом Лоткою та Віто Вольтеррою в 1925 та 1926 роках [1].

Класичну математичну модель «хижак – жертва» Лотки-Вольтерри використовують в багатьох галузях науки і техніки. Модель набула популярності завдяки вдалому поєднанню в ній відносно невеликої складності і сильної нелінійності. Модель має високий ступінь універсальності під час описування поведінки складних систем, що працюють в режимі автоколивань.

Вольтеріанські моделі використовуються і в економіці. Найчастіше цей клас моделей застосовується для аналізу ринку праці з урахуванням, наприклад, чисельності потенційних робітників як «хижаків» та кількості робочих місць – «жертв». Також в ролях «хижака» і «жертви» можуть виступати, наприклад, державний бюджет та ВВП; взаємовідносини країн (наприклад, США – Росія, США – Китай); чисельність капіталістів та робочих; чисельність працівників, зайнятих у приватному секторі економіки і в державному; кількість споживачів та виробників; попит і пропозиція.

Економічним аналогом моделі «хижак – жертва» є, наприклад, модель Гудвіна. Досліджуючи економічні цикли (1965 рік), американський економіст Річард Гудвін побачив, що у власних розрахунках прийшов до моделі Лотки-Вольтерри «хижак – жертва» [2; 3, с. 3].

В оригінальній моделі конкуруючих видів, тобто хижака і жертви, можна виділити той факт, що чисельність хижаків зростає тим швидше, чим більше чисельність жертв, тоді як кількість жертв зростає тим швидше, чим менше кількість хижаків. Р. Гудвін визначив, що зайнятість зростає тим швидше, чим більше капіталістів, а чисельність капіталістів збільшується тим швидше, чим менше рівень зайнятості.

Таким чином, в моделі Гудвіна робочі є хижаками, а капіталісти – здобиччю. Економічний сенс цього порівняння досить простий. Коли прибутки високі, інвестиції також високі, а через те, що всі інвестиції вимагають додаткової праці, високий рівень інвестицій приводить до швидкого зростання зайнятості. З іншого

боку, коли зайнятість низька, заробітна плата зменшується, а прибуток збільшується.

Р. Гудвін був першим з економістів, хто використав модель «хижак – жертва» до економічних циклів. Деякі дослідження наполягають на тому, що ще до Р. Гудвіна цю модель використав італійський економіст Джузеппе Паломба (1939 рік) [4; 5].

Більш конкретний приклад моделі «хижак – жертва» в економічній сфері, що є особливо цікавим і актуальним, знаходимо в дослідженні Сон-Джун Лі, Док-Джу Лі і Хен-Сік О (2005 рік) в динаміці Корейської фондової біржі (КФБ) і корейських дилерів з цінних паперів (KSDAQ), двох конкуруючих корейських фондових ринків [6, с. 21; 7]. Згідно з дослідженнями KSE грав роль хижака, поки врешті-решт відносини цих двох ринків не стабілізувалися в чисту конкуренцію. Також у своїй роботі Теодор Модіс (2003 рік) обговорює відносний успіх авторучки порівняно з кульковою ручкою з 1929 по 2000 роки [6, с. 22; 8]. У цьому дослідженні два типи ручок спочатку пішли шляхом моделі «хижак – жертва», але більше не взаємодіють сьогодні. Дослідження Едварда Граса (2004 рік) пристосовує бізнес-цикли до моделі Лотки-Вольтерри [6, с. 22; 9].

Як можна побачити, є велика кількість важливих застосувань цієї моделі в економічному спектрі. Незважаючи на зазначене, ця модель несе більш узагальнений, ніж точний, предикативний характер [11, с. 6]. На цю властивість моделі впливають такі чинники:

1) середовище, в якому існують «хижаки» і «жертви», ізолюване від зовнішніх чинників впливу;

2) «хижаки» і «жертви» знаходяться в специфічній залежності один від одного, адже зменшення популяції «жертв» спричиняє зменшення кількості «хижаків»; коли «хижаків» замало, «жертви» збільшують свою чисельність;

3) «жертви» існують в необмеженій кількості або з'являються у чітко визначеній періодичності;

4) «вимирання» здійснюється таким чином, що в кожному одиниці часу зникає постійна частка учасників процесу;

5) популяції «хижаків» і «жертв» здійснюють той самий цикл неперервних коливань доти, поки не втрутиться якась зовнішня сила і не змінить їх чисельність радикально.

Враховуючи названі умови, можна побачити причину невідповідності моделі реальним умовам існування систем економічного характеру, що, наприклад, не є ізолюваними і знаходяться в складних взаємовідносинах одночасно з декількома економічними агентами, а не тільки попарно.

Для наближення моделі до реальних результатів спостережень застосовуються різні методи модифікації. Одним із методів є введення обмеження на ріст популяцій «жертв» або «хижаків», що будуть необмежено збільшуватись за необмеженої кількості ресурсів, що не від-

повідать дійсності, як і існування необмеженого ринку. Також модель поліпшують за допомогою введення часу запізнення аргументу, значення якого визначається методом експериментального підбору. Останній метод започаткував сам В. Вольєрра, усвідомлений про неточність власної моделі [11].

Проте, як відзначає Ю.М. Свірежев, «метою Вольєрра був не точний опис якоїсь конкретної ситуації (для цього зазвичай придатні статистичні регресійні моделі), а дослідження загальних властивостей таких систем» [8, с. 250]. Модель «хижак – жертва» нині широко використовується науковцями в медицині та біології, а прикладами її застосування в економіці є розрахунки приватизаційних циклів у Великобританії, Швеції.

У загальному вигляді система має такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) \\ \frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x) \end{cases} \quad (1)$$

де  $x$  – кількість «жертв»;

$y$  – кількість «хижаків»;

$t$  – час;

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  – певні параметри, що задають зв'язок між змінними;

$\alpha$  – коефіцієнт приросту жертви під час відсутності хижака; за відсутності хижака жертва розвивається за законом зростання Мальтуса;

$\beta$  – коефіцієнт втрат жертв під час зустрічі з хижаками;

хижак харчується тільки жертвами; за відсутності жертви він розвивається за експонентним законом загибелі, при цьому коефіцієнт втрат хижака –  $\gamma$ .

$\delta$  – коефіцієнт, що відображає залежність від частоти зустрічей хижаків і жертв, що закінчується «трапезою» хижака.

Для безпосереднього моделювання явищ за допомогою систем Лотки-Вольєрри використовується низка програмних пакетів. Однією із найзручніших є система «Matlab» [12].

Основні переваги «Matlab», що вигідно виділяють її серед наявних нині математичних систем і пакетів («Mathcad», «Mathematica» тощо), такі:

1) мова програмування системи «Matlab» дуже проста навіть для користувача-початківця; вона містить лише декілька десятків операторів; незначна кількість операторів тут компенсується великою кількістю процедур і функцій, зміст яких зрозумілий користувачу з відповідною математичною підготовкою;

2) на відміну від більшості математичних систем, «Matlab» є відкритою системою; це означає, що практично всі процедури і функції «Matlab» доступні не тільки для використання, але й для корекції і модифікації; «Matlab» – система, яку користувач може розширювати на свій розсуд створеними ним програмами і процедурами (підпрограмами); її легко пристосувати до вирішення потрібних класів задач;

3) останні версії «Matlab» дають змогу легко інтегрувати її з текстовим редактором Word, що дає можливість використовувати під час складання текстових документів обчислювальні і графічні засоби «Matlab» [12].

Опишемо ті функції і можливості «Matlab», якими скористалися під час реалізації моделі «хижак – жертва» Лотки-Вольєрри.

Оскільки ми будемо виконувати одну послідовність операцій кілька разів, а відрізнитися будуть лише значення коефіцієнтів, доцільно створити файл-функцію (М-файл), а потім викликати його за необхідності.

Для прикладу візьмемо деяке підприємство  $X$ , що на даний момент часу має 50 вакантних місць у цеху, на які претендують 100 кваліфікованих потенційних робітників. Під час моделювання ми виключаємо сторонні фактори, що можуть впливати на цю ситуацію (економічний стан країни загалом, соціальні фактори, сезонність тощо). Прийmemo майбутніх робітників за «хижаків», а робочі місця – за «жертв».

Коефіцієнти рівнянь можна легко вирахувати, маючи статистику появи нових вакансій в рамках певного періоду і співбесід потенційних робітників з представниками відділу кадрів. В прикладі використані приблизні значення коефіцієнтів, що покликані наочно продемонструвати роботу моделі.

Значення коефіцієнтів:

$\alpha$  – коефіцієнт приросту вакантних місць за відсутності потенційних робітників = 0,05;

$\beta$  – коефіцієнт ефективності «полювання» робітників за місцями = 0,001;

$\gamma$  – коефіцієнт зменшення кількості потенційних робітників = 0,02;

$\delta$  – коефіцієнт появи нових потенційних робітників на трудовому ринку = 0,5.

Задаємо назву функції:

```
function Lotka_Volterra.
```

Далі вказуємо значення змінних  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ :

```
alpha = 0,05;
```

```
gamma = 0,5;
```

```
beta = 0,001;
```

```
delta = 0,5;
```

Зазначимо часовий проміжок (чим більше число, тим більше точність результату):

```
N = 1 000.
```

Формуємо масиви для значень змінних  $X, Y$ :

```
X = zeros (1,N);
```

```
Y = zeros (1,N).
```

Задаємо початкові значення:

```
X(1) = 50;
```

```
Y(1) = 100.
```

Моделюємо систему рівнянь:

```
for n = 2:N
```

```
X(n) = X(n-1) + alpha*X(n-1) - beta*  
*X(n-1)*Y(n-1);
```

```
Y(n) = Y(n-1) - gamma*Y(n-1) +  
beta*delta*X(n-1)*Y(n-1);
```

```
end.
```

Забезпечуємо вивід отриманих даних у графік:

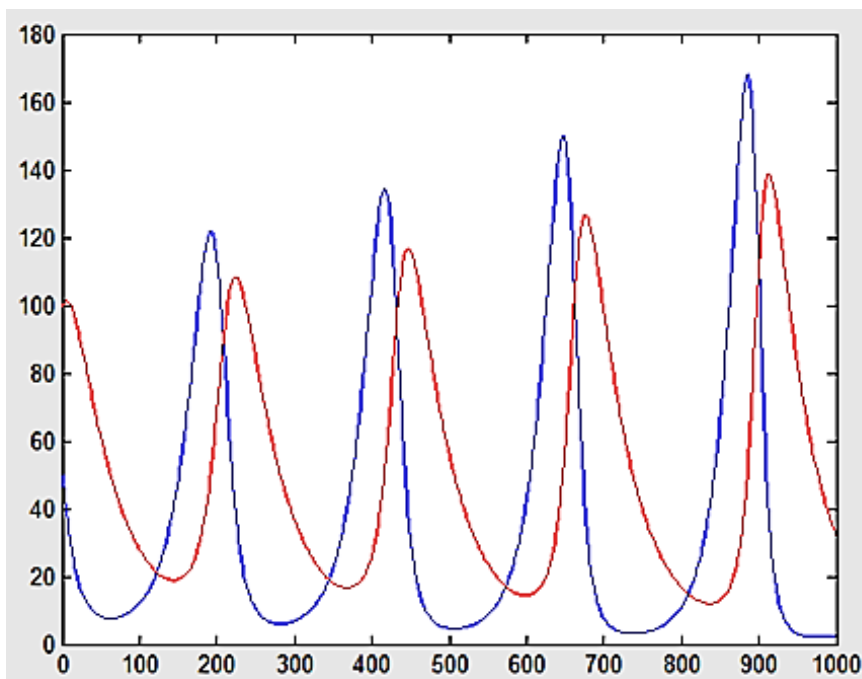


Рис. 1. Кількість запропонованих кандидатів

```
Xvals = 1:N;
plot(Xvals, X, 'b', Xvals, Y, 'r')
end.
```

Результати моделювання наочно проілюстровані на рис. 1. Блакитним кольором виділено зміну кількості робочих місць протягом деякого періоду  $N$ , червоним – зміну кількості робітників, які запропонували свою кандидатуру.

Можна побачити, що спад кількості потенційних робітників спричиняє різкий зріст чисельності вакансій, адже вакантні місця не займаються, а нові місця продовжують з'являтися. Пік зростання вакансій змушує ринок праці поживатися, і нові працівники починають пропонувати свою працю на підприємство, тим самим займаючи «вільні» посади і поступово зменшуючи їх кількість.

Настає момент, коли всі вакансії зайняті. Потенційні робітники все ще з'являються, проте вільних місць на підприємстві ще немає, тому з часом і їх чисельність приймає спадну динаміку (можливо, робітники наймаються на роботу на інші підприємства).

На графіку, що є результатом роботи моделі, також спостерігається загальна тенденція до зростання.

**Висновки.** В економіці як відкритій системі широко використовуються засоби математичного моделювання. Модель Лотки-Вольтерри «хижак – жертва» є однією із широковживаних моделей. Її використовують для аналізу перебігу багатьох економічних явищ і об'єктів, враховуючи, наприклад, чисельність потенційних робітників як «хижаків» та кількість робочих місць – «жертв», державний бюджет та ВВП; чисельність капіталістів та робочих; чисельність працівників, зайнятих у приватному секторі економіки і в державному; кількість споживачів та виробників; попит і пропози-

цію. Незважаючи на зазначене, ця модель несе більш узагальнений, ніж точний, предикативний характер. Розв'язком цієї моделі як системи рівнянь є автоколивання.

#### БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Lotka A.J. Elements of Physical Biology / A.J. Lotka. – 1925.
2. Goodwin R.M. A Growth Cycle / R.M. Goodwin. – 1967.
3. Vadasz V. Economic Motion: An Economic Application of the Lotka-Volterra Predator-Prey Model / V. Vadasz. – 2007. – P. 32.
4. Gandolfo G. The Lotka-Volterra Equations in Economics: An Italian Precursor / G. Gandolfo / *Economia politica*. – 2007. – Issue 3. – P. 343-348.
5. Palomba G. Introduction to the Study of Economic Dynamics / G. Palomba. – 1939.
6. Von Arb R. Predator Prey Models in Competitive Corporations / R. Von Arb // Honors Program Projects. – 2013. – P.45. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [http://digitalcommons.olivet.edu/honr\\_proj/45](http://digitalcommons.olivet.edu/honr_proj/45)
7. Technological forecasting at the Korean stock market: A dynamic competition analysis using Lotka -Volterra model / [S. Lee, D. Lee, H. Oh] // *Technological Forecasting and Social Change*. – 2005. – P. 1044-1057.
8. Modis T. A Scientific Approach to Managing Competition / T. Modis // *The Industrial Physicist*. – 2003. – P. 25-27.
9. Gracia E. Predator-Prey: An Efficient-Markets Model of Stock Market Bubbles and the Business Cycle / E. Gracia. – 2004.
10. Компьютерные технологии в задачах природы и общества. Часть 2. Модель Лотки-Вольтерра «хищник – жертва» в задачах экономики» / [Ю.Н. Соколов, А.Ю. Соколов, В.М. Ілюшко] // *Радиоелектронні і комп'ютерні системи*. – 2010. – № 3. – С. 20-26. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/recs\\_2010\\_3\\_6](http://nbuv.gov.ua/UJRN/recs_2010_3_6)
11. Козик В.В. Проблеми застосування моделей типу «хижак – жертва» в економічній практиці / В.В. Козик, Ю.І. Сидоров // *Наука та інновації*. – 2011. – Т. 7. – № 1. – С. 5-15.
12. Дьяконов В.П. MATLAB. Полный самоучитель / В.П. Дьяконов. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.